Programme de khôlle de maths n° 10

Semaine du 8 Décembre

Cours

Chapitre 6 : Suites numériques

- Vocabulaire sur les suites : majorée, minorée, bornée, croissante, décroissante
- Suites arithmétiques, suites géométriques, suites arithmético-géométriques, suites récurrentes linéaires d'ordre 2 (cas où l'équation caractéristique admet des solutions réelles uniquement)
- Limites infinie, limite finie : définitions quantifiées
- Unicité de la limite
- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \iff \lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - \ell| = 0$
- (u_n) converge ssi (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite (admis)
- (u_n) bornée et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} (u_n v_n) = 0$, $\quad (u_n)$ bornée et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \pm\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 0$.
- Limites de référence
- Calcul de limites : opérations, composition par une fonction continue, passage à la limite dans une inégalité ou dans une égalité.
- Théorèmes de convergence : limite monotone, théorèmes de comparaison,
- Suites adjacentes.
- Croissances comparées : si $a > 1$ et $b, c > 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^b}{a^n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(\ln n)^c}{n^b} = 0$, en particulier :
  - $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{\mathrm{e}^n} = 0$
  - $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{\mathrm{e}^n} = 0$
  - $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln n}{n} = 0$
  - $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln n}{\sqrt{n}} = 0$
- Équivalents de suites, $u_n \sim v_n \iff \exists(\gamma_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \gamma_n v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \gamma_n = 1$ ce qui est équivalent à $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$ lorsque (v_n) est une suite qui ne s'annule pas.
- Opérations sur les équivalents : produit, quotient, composition par $x \mapsto x^a$.
- Trois équivalents à connaître : si (u_n) est une suite qui converge vers 0, on a
  - $\sin u_n \sim u_n$
  - $\ln(1 + u_n) \sim u_n$
  - $\mathrm{e}^{u_n} - 1 \sim u_n$

Questions de cours

- Démontrer l'unicité de la limite (limite finie uniquement)
- Montrer avec la définition que si u_n est bornée et que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = 0$.
- Démontrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell'$ (avec $(\ell, \ell') \in \mathbb{R}^2$), alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = \ell + \ell'$
- Démontrer qu'une suite convergente est bornée.